あいまいさの効用
– ファジィ理論とその周辺 –

基礎工学研究科　システム創成専攻
社会システム数理領域
教　授　**乾 口 雅 弘**

1. はじめに

1990 年前後,「ファジィ時代の始まり！」という某社のファジィ洗濯機の宣伝文句に表されるように，数年間に渡って日本にファジィブームが到来しました．家電では，洗濯機に始まり，エアコン，ビデオカメラ，掃除機からコーヒーメーカーに至るまで，ありとあらゆる家電製品にファジィ理論*が応用され製品化されました．その後，バブル崩壊とほぼ同時に「ファジィ」という言葉も耳にすることが無くなりました．因みに，この頃日本家電では現れなくなった「ファジィ(fuzzy)」という商標も輸出向け家電には未だ健在でした．ファジィ理論は彗星のように現れ去っていったように見えますが，ブーム以降，一つの分野として確立し，ファジィをタイトルにもつ主要な国際学術雑誌だけでも，4 誌は下りません．その他の雑誌も含めると 10 誌以上あり，確実に発展しています.

「ファジィ」とは英語の “fuzzy” の読みで,「ぼやけた」,「羽毛のような」という意味で,「あいまい」と訳されています．本稿では，ファジィ理論の効用，科学にあいまいさを取り込むことの利点について筆者の観点から述べさせて頂こうと思います.

2. 日常生活におけるあいまいさ

科学では，あいまいさよりも明確さを好むことが多いのですが，日常生活においては，結構あいまいさが利用されています．まず，モノでは，自動車のハンドルの遊びがあります．遊びが無ければ，前輪の受ける振動でハンドルが振れ，運転手が不快感を感じます．逆に，遊びが多すぎると，ハンドル操作が遅れたり，自動車がふらついたりします．手頃な遊びが必要とされています．ブレーキやクラッチにも遊びはあります.

政治では，先日のドイツ・ハイリゲンダムで開催された G8 で,「温室ガス 2050 年半減を検討する」といった画期的な合意が得られましたが，いつの温室ガス排出量を基準にするかは明言されていません．また,「半減する」とは断言せず「半減を検討する」としか言っていません．これらを明らかにすると合意に至らないからです.

日常言語では，頻繁にあいまいさが現れます．料理番組では,「塩少し」,「胡椒少々」とか，料理を注文するとき「ちょっと辛めにして」というように,「少し」,「少々」,「ちょっと」,「辛め」などあいまいな言葉がたくさん出てきます．これ以外にも,「彼は若いね」,「あの西瓜は大きい」などの文では,「若い」,「大きい」といった表現は，何歳以下が若いのか，直径が何 cm 以上が大きいのかがはっきりしておらず，あいまいさを含んでいます.

数値的なものとして，たとえば,「阪大基礎工から蛍池駅までタクシーに乗ったらいくらかかる？」という問に対して「800 円くらい」というようにあいまいに答えることはよくあることです.

このように，日常生活，とりわけ言語にはあいまいさはたくさん存在しています.

3. なぜファジィ家電は成功したか (ファジィ制御)

3.1. 人の経験的知識を利用する

物事を正確に測定し，精密にモデル化し，厳密に計算し，明解な答えを求めることにより，科学は成功を収めてきましたし，今後も更なる成功を生み出すことでしょう．しかし，正確で厳密な答えは

*ファジィ理論の提唱者はカリフォルニア大学の L.A. Zadeh 先生で，1965 年に “Fuzzy Sets” という題目の論文で公表されました.

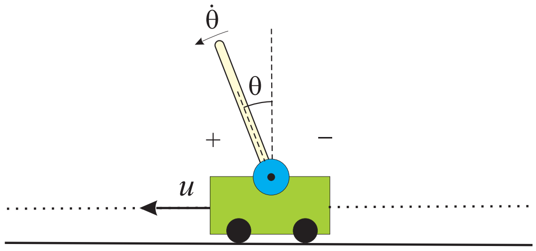

図 1: 倒立振子

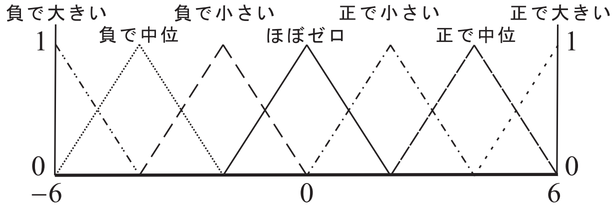

図 2: メンバシップ関数

測定や計算などに時間的・経済的なコストを要求することが多くあります．複雑な対象は，それをモデル化することが煩雑で困難なものとなりやすく，モデル化できたとしても，それを正確に解析し厳密な解を求めるためには，かなりの計算コストが必要となることも少なくありません．

一方，人間は，厳密なモデル化や計算を行わなくとも，複雑な問題の解をうまく見出していることがよくあります．たとえば，自動車の車庫入れを考えますと，運転手はそれがどのような物理法則に則ったモデルかを知ることなく，「車がこのくらいの位置なら，ハンドルをこのくらい切って」というように，経験や直感に基づき自動車をうまく車庫に入れます．このように，人間は複雑な問題を解いていることはよくあります．

ファジィ家電の成功の鍵の一つはこの点にあります．つまり，従来の科学が対象とする問題を正確にモデル化しようとしていたのに対し，家電に応用されたファジィ制御では，複雑な問題を解く人間の経験や知識をモデル化したのです．

たとえば，図 1 のような倒立振子の制御問題を考えましょう．つまり，台車をうまく制御することで，回転する棒をできるだけ長く (できれば無限に) 立つようにする問題です[†]．左側に倒れる方向をプラス方向，右側をマイナス方向とし，鉛直方向と棒とがなす角度を θ，その角速度を $\dot{\theta}$ としましょう．このとき，棒の角度 θ と角速度 $\dot{\theta}$ との情報から適切な制御入力 (台車を引く力) u を決定することになります．

皆さんの経験からも，次のルールは了解できるでしょう．

- θ が正で中位で $\dot{\theta}$ がほぼゼロならば，u を正で中位の値に．
- θ が正で小さく $\dot{\theta}$ も正で小さいならば，u を正で小さい値に．
- θ が正で小さく $\dot{\theta}$ が負で小さいならば，u をほぼゼロに．
- θ が負で中位で $\dot{\theta}$ がほぼゼロならば，u を負で中位の値に．
- θ が負で小さく $\dot{\theta}$ が負で小さいならば，u を負で小さい値に．
- θ が負で小さく $\dot{\theta}$ が正で小さいならば，u をほぼゼロに．
- θ がほぼゼロで $\dot{\theta}$ もほぼゼロならば，u をほぼゼロに．

この他にもルールは考えられるでしょうが，ここではこれだけに留めておきます．ファジィ制御では，このルールに基づき，制御入力 u が求められます．

ほんの少し数学的になりますが，具体的には，「正で中位の値」，「ほぼゼロ」，「負で小さい」などの度合いを示す関数[‡]を図 2 のように定めます．センサーにより角度 θ と角速度 $\dot{\theta}$ が観測されますと，上のルールに基づく制御入力は図 3 に示すように計算され，正しいルールであれば，倒立振子は長い間立つことができます．

3.2. 補間による少ないルール

[†] この問題は，1987 年東京で開催された国際ファジィシステム学会世界会議で九州工業大学の山川 烈 先生がデモンストレーションされた問題で，七つのルールもそのときに使われたものです．

[‡] このような関数はメンバシップ関数と呼ばれます．

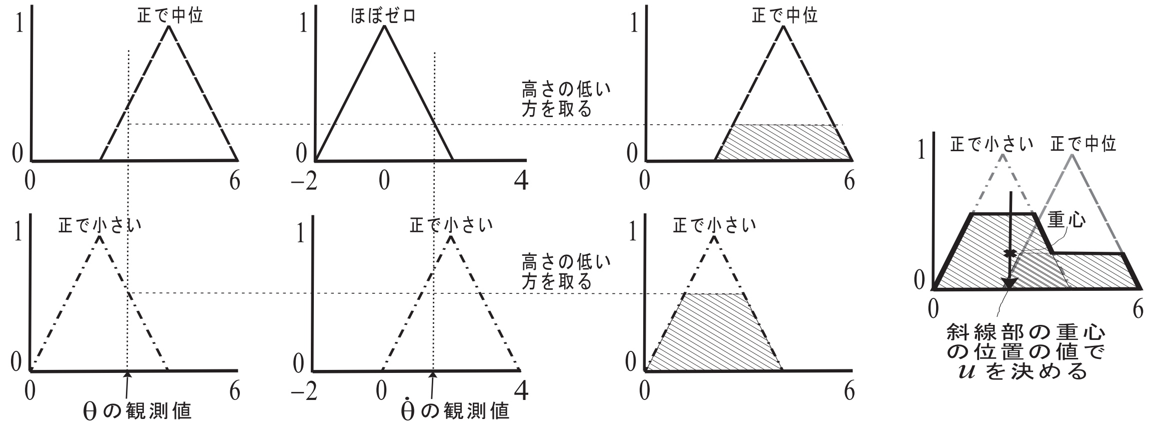

図 3: 制御入力 u の決め方

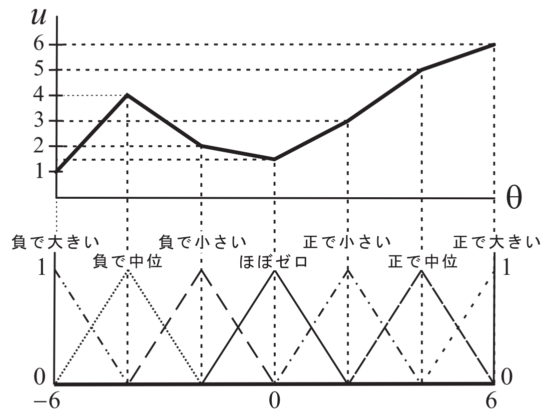

図 4: ファジィ推論法における θ と u の関係

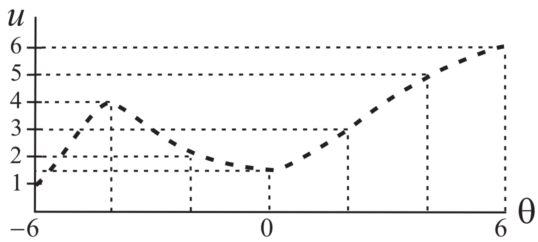

図 5: θ と u の真の関係

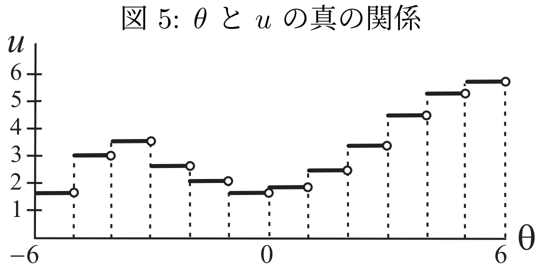

図 6: 従来の近似

上のようなルールによる計算[§]がどのようになっているか，もう少し単純なルールで見てみましょう．ここでは，ルールの条件部の変数が θ のみで，結論部が「正で中位」や「ほぼゼロ」でなく，実数値である次の七つのルール[¶]の場合を考えましょう．

- θ が負で大きいならば，u を 1 に．
- θ が負で中位ならば，u を 4 に．
- θ が負で小さいならば，u を 2 に．
- θ がほぼゼロならば，u を 1.5 に．
- θ が正で小さいならば，u を 3 に．
- θ が正で中位ならば，u を 5 に．
- θ が正で大きいならば，u を 6 に．

このとき，-6 から 6 の間の θ に対する u の値をプロットすると，図 4 のように折れ線になります．折れ線の頂点は，各ルールの「正で大きい」や「ほぼゼロ」の度合いを示す関数値が 1 となっている θ と結論部の実数値になっています．θ に対する最適な入力値 u が図 5 のような非線形関数

[§]ファジィ推論法と呼ばれています．

[¶]結論部が実数値のルールをもつファジィ推論法は簡略型ファジィ推論法と呼ばれています．

で与えられるとしますと，図 4 はこれの近似とみることができます．一方，この非線形関数を従来のルールで近似しようとしますと，図 6 のように階段関数となり，ルールも，

- $\theta \in [-6, -5]$ ならば，u を 1.8 に.
- $\theta \in [-5, -4]$ ならば，u を 3 に.
- $\theta \in [-4, -3]$ ならば，u を 3.5 に.

$$\vdots$$

- $\theta \in [4, 5]$ ならば，u を 5.8 に.

とかなり多くなり，ルールをすべて書くのことだけでも大変になりえます．近似精度も図 6 よりも図 4(ファジィ) の方が良くなっています.

因みに，ニューロ・ファジィ技術は，ルールの結論部の値や「正で大きい」などを表す関数 (三角形の頂点) を，近似精度が高くなるように学習できるようにしたものです.

4. 融通がきくのに頑健である（ファジィ数理計画法）

4.1. ファジィ数理計画法

ファジィ理論には，家電で流行ったファジィ制御ばかりでなく，様々な手法があります．その中で，最適化問題でのあいまさの効用を見てみましょう.

定められた制約条件を満たす領域内で，コスト最小化や利益最大化を行う方法は数理計画法と呼ばれています．生産計画問題，栄養摂取計画問題，製品設計問題，スケジューリング問題など，多くの問題が数理計画法の対象となります.

数理計画法では，条件やパラメータ (係数など) を明確に与えることにより，実際問題は数学モデルとして記述されます．しかし，一般に現実問題では,「作業時間が 8 時間以内」や「資金は 100 万円まで」などのように厳密な条件ばかりとは限りません．残業を考慮すれば 8 時間を越えることも可能でしょうし，資金の 100 万円は目安であることが多いでしょう.「作業時間はできる限り 8 時間以内」,「資金はだいたい 100 万円まで」というように弾力のある条件と捕らえた方がより現実的と考えられます．弾力のある制約条件を厳密な制約条件として扱えば，実行可能解が存在しなくなったり，制約条件のためにずっと良い解を逃してしまうことがあります．ファジィ数理計画法では，弾力のある制約条件を取り扱い，弾力性をうまく融通した良好な解を求めることができます.

一方，通常の数理計画問題では，コスト関数の係数や製造時間などのパラメータは明確に与えられると仮定されてきましたが，これらも明確にわからない場合があります．たとえば，材料が時価で定まる場合や不定期に割引がある場合，工程が安定していない場合などには，これらのパラメータは不明確になります．不明確なパラメータを平均などの代表値で取り扱い解を求めても，パラメータが平均と異なった値を取れば，その解が制約条件を満たす保証はありません.

設計問題などでは，係数がある程度変動しても制約条件を必ず満たすといった頑健性を保証する解が必要となることがよくあります．不明確な係数をファジィ数 (あいまいな数) として扱えば，これが可能となります．同様な取り扱いは確率計画法でもできるのですが，ファジィ数理計画法で扱えば，問題がより簡単になることが多いという利点があります.

4.2. 2 種類のあいまいさ

あいまいさには 2 種類のものがあることを述べておきたいと思います.「漠然性 (vagueness)」と「不明確さ (ambiguity)」です．ファジィ数理計画法の話では，弾力のある制約条件が「漠然性」に，不明確なパラメータ値が「不明確さ」に対応しています．前者は境界がはっきりしないあいまいさ，つまり制約条件が明確でなく満たしている領域と満たしていない領域との境界がぼやけていること

を言っています．後者はいずれが正しい値かがきっちりとわかっていないこと，つまり実現値が明確でないことを言っています．

不明確さは更に分類することも可能ですが，これ以上の分類はやめておきます．因みに，確率論は不明確さを取り扱っています．ファジィ理論は両方のあいまいさを取り扱っています．

5．無知を表す（証拠理論）

老子の言葉に,「知不知上，不知知病」(知りて知らずとするは上なり，知らずして知れりとするは病なり) とありますが，ここで紹介する証拠理論は，この精神に則っているといえます．

いま，地区代表に A，B の 2 名が立候補したとします．所信表明は終了した段階でいずれが有力かなどの情報はまったくわかっていません．このような無知の状況は，どのように表せるでしょうか？

ベイズ (Bayes) の確率論では，理由不十分の原則，つまり，無知なので「いずれかの候補者が他より支持率が高いという根拠はない」という考え方に従い，A，B の支持率 (当選確率) を等しく表現します．一方，仮に支持率を調査し，いずれも互角という情報が得られた場合はどうでしょう．当然，この場合も A，B の支持率は等しく表現されます．

互角という状況と何の情報もない無知の状況とは，本当に等しいでしょうか？... そんなことはありません．情報が無ければ，自信の無い候補者は諦めムードになるでしょうし，自信過剰の候補者は，選挙を軽く見るかもしれません．しかし，支持率が同じと知ると，自信の無い候補者は当選するかもしれないといっそう努力しますし，自信過剰の候補者も危機感を感じるでしょう．このように，ベイズの確率論の無知の表現は必ずしも受け入れられるとは限りません．そこで，無知の状態を，支持率の和が 1 となるすべての支持率割当の集まりで表す方法が，Dempster により提案されています．

所信表明の結果，地区住民のうち 20% が「A さんを支持している」という情報を入手したとしましょう．確率で表現しようとすると，和が 1 となるという性質から，80% の人が「A さんを支持していない，つまり，B さんを支持している」ということと誤解されがちですが，そうではありません．20% の人が「A さんを支持している」ことは主張していますが，残りの 80% の人の意見については何も言及していません．この情報を確率で用いて表そうとすると，不明な 80% の人の支持をどのように扱うかが問題となります．しかし，証拠理論では，A さんを支持という事象に 0.2，A さんか B さんのいずれかを支持という複合事象に 0.8 を割り当てて，部分的な無知を表します．

証拠理論では，情報間の矛盾・対立による不明確さ，すなわち，不一致さと，結論が特定できない不明確さ，すなわち，不精密さとを扱うことができます．不一致と不精密との観点から，確率論と不明確さを扱うファジィ理論 (=可能性理論) とを説明しますと次のように述べられます．確率論では，精密ですが互いに対立した情報，すなわち，不一致さが取り扱われている．一方，可能性理論では，情報は対立せず一致していますが，特定度の低い情報，すなわち，不精密さを取り扱っています．このように，確率論と可能性理論は相対立する理論ではなく，不明確さの異なった側面を取り扱っており，互いに補い合う理論となっています．また，証拠理論はこれらを包括したより一般的な理論とみることもできます．

6．質を落とさず簡潔に（ラフ集合理論）

ファジィ理論や証拠理論と類似した理論として，ラフ集合理論があります．ラフ集合理論では，識別不能性によるあいまいさを取り扱っています．アインシュタインの格言に “Everything should be made as simple as possible, but not simpler” （物事はできる限り簡潔にすべきであるが，必要以上に簡潔にしてはならない）があります．ラフ集合理論で行っていることは，この格言に相当するかもしれません．

いま，図 7 のように全体がブロックに分割されているとします．このとき，図中の集合 X はそれに含まれるブロックの集まり $R_*(X)$ と，共通部分をもつブロックの集まり $R^*(X)$ により近似できま

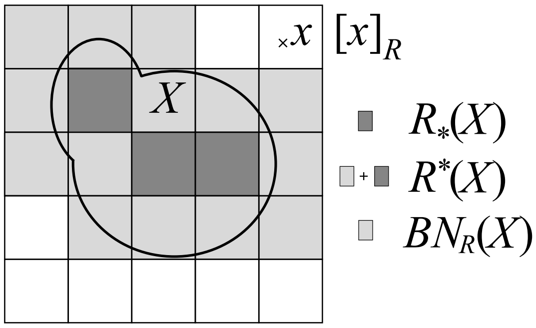

図 7: 下近似 $R_*(X)$ と上近似 $R^*(X)$

表 1: 決定表

患者	頭痛	鼻水	体温	筋肉痛	流感
$p1$	無	無	非常に高	有	有
$p2$	無	有	高	有	有
$p3$	有	無	高	無	無
$p4$	有	有	高	無	有
$p5$	無	無	非常に高	有	無
$p6$	有	無	平熱	無	無

す．前者は下近似，後者は上近似と呼ばれます．この下近似と上近似のペアはラフ集合と呼ばれます．

ラフ集合は，表 1 に示すようなデータ表の解析に利用されることが多いです．表 1 は患者のデータにより，流感と頭痛，鼻水，体温，筋肉痛との関係を示しています．この表に基づき，頭痛，鼻水，体温，筋肉痛の情報から流感であるかどうかを判断する診断モデルを作成してみましょう．

頭痛，鼻水，体温，筋肉痛の情報から患者は $\{p1, p5\}$, $\{p2\}$, $\{p3\}$, $\{p4\}$, $\{p6\}$ と分類できます．この分類が図 7 のブロックに対応しています．これらを用いて，流感である患者の集合 $\{p1, p2, p4\}$ を近似しますと，下近似が $\{p2, p4\}$，上近似が $\{p1, p2, p4, p5\}$ となります．つまり，$p1$ と $p5$ は症状が同じなのに診断が異なっているので，これらの診断は疑わしいということになり，$p1$ が下近似に帰属しません．$p1$ が誤りとは限らず，$p5$ が誤りかも知れませんので，上近似には，$p1$ も $p5$ も帰属することになります．一方，流感でない患者の集合 $\{p3, p5, p6\}$ の下近似は $\{p3, p6\}$，上近似は $\{p1, p3, p5, p6\}$ となり，やはり下近似では疑わしい $p5$ は取り除かれ，上近似には $p1$ も $p5$ も帰属しています．このようにラフ集合を用いれば，疑いのある情報を見分けることができます．

ところで，診断の質を変えない範囲で，流感の診断に必要最小限の情報が何かがわかれば，問診時間などが短縮でき，効率的になります．すなわち，問診項目である頭痛，鼻水，体温，筋肉痛がすべて必要かどうか調べ，不要なものを削除します．問診項目を削除すればするほど，患者が区別しにくくなります．図 7 でいえば，ブロックが大きくなっていきます．ブロックが大きくなると，X に含まれにくくなりますので，下近似 (誤りがないと考えられる患者) が小さくなっていきます．このことから，下近似が小さくならずに保存できる範囲で問診項目を削除していき，最も少ない問診項目を求めれば良いことになります．

表 1 でこれを行えば，最少必要限の問診項目の組は三つあり，それらは “頭痛と鼻水”，“鼻水と体温”，“鼻水と筋肉痛”です．たとえば，頭痛と鼻水について問診すれば，表 1 の診断の質を落とすことなく，流感か否かを識別できることを表しています．頭痛の代わりに体温でもかまいませんし，鼻水でもかまいません．ただし，いずれの場合も鼻水が必要ですので，鼻水が最も重要な問診項目であることがわかります．

このようにラフ集合を用いれば，診断や決定に必要な最小限の項目を見出すことができます．これにより，コストが削減できるばかりでなく，本質が見極めやすくなるという利点をもっています．この他，ラフ集合はデータ表に内在する簡潔なルールを求めるためにも利用されます．

7. おわりに

ファジィ理論と関連するいくつかの手法を紹介しました．ファジィ理論では，漠然性と不明確さなど，種々のあいまいさが取り扱われています．また，ファジィ理論以外にもあいまいさを取り扱う理論は多く存在しています．社会や実生活には多くのあいまいさが存在し，あいまいさを排除したモデルでは，現実の問題を必ずしも完全には表しきれないことが，これらの研究のきっかけになって

いると思われます．世の中に，あいまいさが存在する限り，あいまいさを扱う研究は衰退せず，研究し続けられることでしょう．

最後に，ファジィ理論を取り巻くパラダイムを紹介して本稿を締めくくりたいと思います．

3.1 の最初で述べましたとおり，正確な測定，精密なモデル化，厳密な計算‖により科学は成功を収めてきましたが，時間的・経済的にコスト高になることもあります．これに対し，測定や計算を大まかに行いコストを抑えつつ，十分に利用できる方法を研究すべきであるというパラダイムがあります．これはソフトコンピューティングと呼ばれています．ソフトコンピューティングは，ファジィ理論ばかりでなく，ニューラルネットワークや，メタヒューリステック手法，確率推論まで含まれる大きな枠組みです．一方，従来法が正確な測定に基づいていた Measurement-Based Approach であるのに対し，人間のように認知に基づいた手法の構築を検討する Perception-Based Approach というパラダイムも提案され，より人間的な計算モデルを確立しようとしています．

また，2 で記しましたように，あいまいさは言語に多く，人間は言語で会話し，言語で考えていることから，コンピュータを人間に近づけるためには，言語による計算，すなわち，Computing with Words というパラダイムが必要とされています．人間の認知や言葉による表現を考えてみましょう．色を例にあげれば，赤，黄，緑，青，紫というように，連続的に変化する色を「赤」,「黄」,「緑」,「青」,「紫」と大まかに分類しています．つまり，連続量をいくつかの粒 (garanule) に分けています．色に限らず，年齢では若い，中年，老年などのように，身長では低い，中くらい，高いなどのように，いずれも粒状に分けています．したがって，人間の認知に基づく計算や言語による計算を行うには，粒に基づく計算，Granular Computing というパラダイムが必要とされています．先に述べましたラフ集合は粒に基づいた計算の基礎になりえます．

ここでは，ソフトコンピューティング，Perception-Based Approach，Computing with Words，Granular Computing と四つのパラダイムを紹介しましたが，興味深いことに，これらはすべて，ファジィ理論の父，Zadeh 教授により提唱されました．ファジィ理論やその周辺の理論がどこまで人間に近い技術を提供できるかは，まだまだわかりません．しかし，着実に進歩しており，大きな学問分野を築いています．今後の更なる理論的発展と現実応用での成功を期待しています．

参考文献

- ファジィ理論の入門書として
  1. 本多中二，大里有生，ファジィ工学入門，海文堂 (1989)
  2. 坂和正敏，ファジィ理論の基礎と応用，森北出版 (1989)
- ファジィ理論，証拠理論，ラフ集合理論を含む書物として
  3. 田中英夫，ファジィモデリングとその応用，朝倉書店 (1990)
  4. 日本ファジィ学会編,「ファジィとソフトコンピューティング」ハンドブック，共立出版 (2000)
- ファジィ制御の入門書として
  5. 菅野道夫，ファジィ制御，日刊工業新聞社 (1988)
- ラフ集合に関する書物として
  6. 森典彦，田中英夫，井上勝雄 編著，ラフ集合と感性，海文堂 (2004)
- ファジィ数理計画法の入門書として
  7. 浅居喜代治，田中英夫 編著，ファジィOR，日刊工業新聞社 (1993)
  8. 石井博昭，坂和正敏，岩本誠一編著，ファジィOR，朝倉書店 (2001)
- 筆者の解説から
  9. 乾口雅弘，井田正明，多様な決定を支援する可能性計画法，日本ファジィ学会誌，Vol.12 (2000)
  10. 乾口雅弘，ラフ集合による情報の解析，システム/制御/情報，Vol.49, No.5, pp.162–172 (2005)

‖これはハードコンピューティングと呼ばれます．